

doi:10.14132/j.cnki.1673-5439.2020.02.004

双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 降维估计算法

周 围^{1,2}, 王 强^{1,2}, 唐 俊², 张 维²

(1. 重庆邮电大学 光电工程学院, 重庆 400065
2. 重庆邮电大学 移动通信技术重庆市重点实验室, 重庆 400065)

摘要:展开互质阵列将两个子阵完全展开,因而可在阵元数目受限情况下获得相较于均匀阵列以及传统互质阵列更大的阵列孔径。文中基于双基地展开互质阵列多输入多输出(Multiple Input Multiple Output, MIMO)雷达阵列结构,提出了基于降维多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法的双基地展开互质阵列 MIMO 雷达离开角(Direction of Departure, DOD)、到达角(Direction of Arrival, DOA)联合估计算法。算法通过增加约束并构造代价函数的方式,将二维 MUSIC 算法中的穷尽搜索二维谱峰转化为求解带约束二次优化问题,先后得到 DOA、DOD,并且 DOD 与 DOA 自动配对。降维思想的引入使得算法无需二维搜索,因而复杂度显著下降。同时,得益于展开互质阵列 MIMO 雷达形成的虚拟阵列与大幅扩展的阵列孔径,提出的算法亦获得了显著提升的分辨率、自由度以及低信噪比下更为优异的估计性能。此外,子阵数目的互质消除了阵元间距大于半波长可能导致的相位模糊问题。仿真验证了算法的有效性。

关键词:DOA; DOD; 多输入多输出; 展开互质阵列; 相位模糊

中图分类号: TN929.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-5439(2020)02-0020-07

DOD and DOA reduced-dimension estimation algorithm for unfolded coprime array bistatic MIMO radar

ZHOU Wei^{1,2}, WANG Qiang^{1,2}, TANG Jun², ZHANG Wei²

(1. College of Electronics Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China
2. Chongqing Key Laboratory of Mobile Communications Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The unfolded coprime array completely expands the two subarrays, leading to a larger array aperture compared with the uniform array and the conventional coprime array when the number of sensors is limited. Based on the structure of unfolded coprime array bistatic MIMO radar, a direction of departure (DOD) and direction of arrival (DOA) joint reduced-dimension estimation algorithm is proposed. By adding constraints and constructing a cost function, the algorithm converts the two-dimensional spectral peak search in the 2D MUSIC algorithm into the problem of solving a constrained quadratic optimization. Then, DOA and DOD are obtained, and automatically paired. The ideal of reduced-dimension makes the algorithm only need one-dimensional search, so the complexity is reduced. Furthermore, due to the virtual array formed by the unfolded coprime array MIMO radar and the greatly expanded array aperture, the algorithm also obtains significantly improved resolution, freedom and better estimation performance at low signal-to-noise ratios. In addition, the coprime of the number of sub-arrays eliminates the phase ambiguity

收稿日期: 2020-01-16 本刊网址: <http://nyzr.njupt.edu.cn>

基金项目: 国家自然科学基金(61771085)和重庆市基础与前沿研究计划(CSTC2015cyjA40040)资助项目

作者简介: 周围, 男, 博士, 教授, zhouwei1020@263.net

引用本文: 周围, 王强, 唐俊, 等. 双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 降维估计算法[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2020, 40(2): 20-26.

caused by sensor spacing greater than half a wavelength. The simulation verifies the effectiveness of the algorithm.

Keywords: direction of arrival (DOA); direction of departure (DOD); MIMO; unfolded coprime array; phase ambiguity

波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计属于阵列信号处理的范畴,主要应用于无线通信、声纳、雷达、医疗、电子对抗等领域。其主要目的在于估计出信号入射至天线的角度,进而完成测向和定位。自 1979 年 SchmidtRO 提出经典的多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法使得波达方向估计进入了超分辨时代以来,针对波达方向估计的研究层出不穷,极大地扩展了其深度和广度。

多输入多输出(Multiple Input Multiple Output, MIMO)雷达^[1]是自 2003 年提出的新体制雷达,其特点在于发射阵列和接收阵列分别配置多根天线用于正交信号发射和远场信号的回波接收,并依据收发阵列是否处于同一位置而分为收发共置单基地和收发单置双基地的两种形式。MIMO 雷达在空间分辨率、自由度以及参数的可识别性等方面均优于传统体制雷达,因而得到了学术界更多的关注。DOA 估计以及离开角(Direction of Departure, DOD)、DOA 联合估计则是 MIMO 雷达的重要研究内容,近年来已取得了一系列重要研究成果^[2-7]。

互质阵列是一种经典的稀疏非均匀阵列,由于子阵阵元间距大于半波长,因而在阵元数目受到限制下可拥有更大的阵列孔径。互质阵列较于传统均匀线阵具有以下优势:(1) 稀疏排布的阵元可实现对接收信号的欠采样,进而突破了奈奎斯特采样定理对天线阵列阵元间距的物理限制;(2) 扩展的阵列孔径可有效提高分辨率以及低信噪比情况下的性能;(3) 可获得远超阵元数目的自由度,从而使得该阵列结构下的估计算法具有识别更多信源的能力。文献[8]对经典的互质线阵、互质面阵以及该阵列结构下的 DOA 估计方法的研究进展进行了详尽介绍。基于互质阵列的 DOA 估计方法一般是通过两个子阵得到各自的空间伪谱,谱峰重合的位置即为真实的 DOA 估计^[9],得益于更大的阵列孔径,该阵列结构下的 DOA 估计性能更佳,但是算法需要额外的解模糊操作,即找到重合的谱峰。此外亦有学者提出无需解模糊的互质阵列 DOA 估计,如文献[10]提出了非圆信号下降维 MUSIC 算法的互质阵列 DOA 估计,直接使用全部阵列的接收数据构造空间协方差矩阵,最后利用降维思想得到 DOA 估计。

展开互质阵列属于互质阵列的范畴,由文献[11]首次提出,区别于传统互质阵列的地方在于两个子阵是完全展开的状态,因而阵列孔径得到进一步的扩展,基于展开互质阵列的 DOA 估计方法则使用全部的阵列的接收数据构造协方差矩阵,进而使用经典 DOA 估计算法得到波达方向估计。文献[12]利用展开互质 L 阵列结构对非圆信号进行 DOA 估计,利用信号的非圆性,可将自由度扩大至两倍,并且获得了更高的估计精度。文献[13]利用展开互质 L 型阵列进行二维 DOA 估计,可实现完全自由度,得益于扩展的阵列孔径,得到了更加精确的 DOA 估计。

传统互质阵列 MIMO 雷达结构则是将传统互质阵列分别作为收发阵列,由于更大的阵列孔径以及 MIMO 雷达可获得扩展的虚拟阵列,该阵列结构下的 DOA 估计和 DOD、DOA 联合估计性能均优于均匀阵列 MIMO 雷达下的估计。文献[14]在谈及展开互质阵列 MIMO 雷达的同时,给出了传统互质阵列 MIMO 雷达的具体结构。文献[15]则给出了展开互质阵列 MIMO 雷达的结构,并在该阵列下提出了 combined-ESPRIT 算法,直接求解闭式解得到 DOD、DOA,避免了谱峰搜索使得运算量大大降低。文献[16]在该阵列结构下提出了单基地下基于 MUSIC 算法以及传播算子算法的 DOA 估计算法,得到极为优异的 DOA 估计性能。

本文则进一步地在文献[16]的基础上提出双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合降维估计算法。首先,由于 MIMO 雷达可虚拟出远大于阵元数目的虚拟阵列,其次,将展开互质阵列作为 MIMO 雷达的收发阵列,虚拟阵列的阵列孔径得以极大的扩展。基于此,算法获得了显著提升的分辨率,自由度提高至 $(M + N - 1)^{2[16]}$ 以及低信噪比下更为优异的估计性能。提出的算法首先将二维 MUSIC 算法中的搜索公式进行重构,随后基于降维思想,增加了消除无意义解的约束方程,并构造了基于约束条件下的求解最优值的数学描述,利用拉格朗日乘数法,构造代价函数,先行解出 DOA,然后将 DOA 回代解出 DOD。算法获得了优异的性能,具体地,算法在信噪比低至 -15 dB 时仍能准确识别多个信源的 DOD、DOA;在信源数目高达 57 个时仍能

准确识别每个信源的 DOD、DOA;在均方根误差关于信噪比以及均方根误差关于快拍数的性能比较上,算法显著优于传统互质阵列 MIMO 雷达下的降维 DOD、DOA 估计算法,以及展开互质阵列 MIMO 雷达下的 combined-ESPRIT 算法,并且得益于降维思想无需二维穷尽搜索,因而计算量较于二维 MUSIC 算法大大降低。此外子阵数目的互质消除了阵元间距大于半波长可能导致的相位模糊问题,本文亦给出了无相位模糊的数学证明。

1 系统模型

双基地展开互质阵列 MIMO 雷达包含异地放置的发射阵列和接收阵列,其几何结构如图 1 所示。发射阵列与接收阵列各包含两个稀疏均匀线阵的子阵 1 和子阵 2,两个子阵按照相反方向完全展开排列,子阵 1 的最后一个阵元与子阵 2 的第一个阵元相重合。设子阵 1 和 2 的阵元数目分别为 M, N ,且 M, N 互质,不失一般性设 $M < N$ 。子阵 1 阵元间距为 $N\lambda/2$,子阵 2 阵元间距为 $M\lambda/2$,其中 λ 为波长,发射阵与接收阵各自的阵元数均为 $M + N - 1$ 。

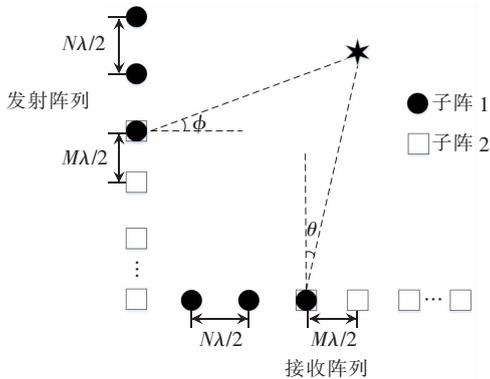


图 1 双基地展开互质阵列 MIMO 雷达几何结构

发射阵列和接收阵列的阵元位置可表示为

$$P_t = P_r = \{Mnd_0 | 0 \leq n \leq (N-1)\} \cup \{M(N-1)d_0 + Nmd_0 | 0 \leq m \leq (M-1)\} \quad (1)$$

其中, d_0 为半波长。

现各个发射阵元同时发射同频正交的周期相位编码信号,发射信号满足条件

$$\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L s_i(k) s_j^*(k) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

$i, j = 1, 2, \dots, M + N - 1$

其中, s_i, s_j 分别是第 i 个和第 j 个发射阵元的信号, L 为每个重复周期的相位编码个数。

假设存在 K 个互不相关的远场目标,且满足

$K < (M + N - 1)^2$,发射角度分别为 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K$,目标的回波波达角度分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$,因此发射阵以及接收阵关于第 k 个目标的导向矢量可表示为

$$\mathbf{a}_t(\phi_k) = [\mathbf{a}_{t1}(\phi_k), \mathbf{a}_{t2}(\phi_k)] \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_r(\theta_k) = [\mathbf{a}_{r1}(\theta_k), \mathbf{a}_{r2}(\theta_k)] \quad (4)$$

其中, $\mathbf{a}_{t1}(\phi_k), \mathbf{a}_{t2}(\phi_k)$ 分别是发射阵子阵 1、子阵 2 的导向矢量, $\mathbf{a}_{r1}(\theta_k), \mathbf{a}_{r2}(\theta_k)$ 则分别是接收子阵 1、子阵 2 的导向矢量, $k = 1, 2, \dots, K$ 。发射子阵与接收子阵的导向矢量表达式分别为

$$\mathbf{a}_{t1}(\phi_k) = [e^{jN(M-1)\pi\sin(\phi_k)}, e^{jN(M-2)\pi\sin(\phi_k)}, \dots, 1]^T$$

$$\mathbf{a}_{t2}(\phi_k) = [e^{-jM\pi\sin(\phi_k)}, e^{-j2M\pi\sin(\phi_k)}, \dots, e^{-j(N-1)\pi\sin(\phi_k)}]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_{r1}(\theta_k) = [e^{jN(M-1)\pi\sin(\theta_k)}, e^{jN(M-2)\pi\sin(\theta_k)}, \dots, 1]^T$$

$$\mathbf{a}_{r2}(\theta_k) = [e^{-jM\pi\sin(\theta_k)}, e^{-j2M\pi\sin(\theta_k)}, \dots, e^{-j(N-1)\pi\sin(\theta_k)}]^T \quad (6)$$

因此得到发射阵与接收阵的阵列流形 $\mathbf{A}_t, \mathbf{A}_r$ 如下

$$\mathbf{A}_t = [\mathbf{a}_t(\phi_1), \mathbf{a}_t(\phi_2), \dots, \mathbf{a}_t(\phi_K)] \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_r = [\mathbf{a}_r(\theta_1), \mathbf{a}_r(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_r(\theta_K)] \quad (8)$$

进而得到展开互质阵列 MIMO 雷达的虚拟阵列流形

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r \mathbf{A}_t = [\mathbf{a}(\phi_1, \theta_1), \mathbf{a}(\phi_2, \theta_2), \dots, \mathbf{a}(\phi_K, \theta_K)] = [\mathbf{a}_r(\theta_1) \otimes \mathbf{a}_t(\phi_1), \mathbf{a}_r(\theta_2) \otimes \mathbf{a}_t(\phi_2), \dots, \mathbf{a}_r(\theta_K) \otimes \mathbf{a}_t(\phi_K)] \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{a}(\phi_k, \theta_k) = \mathbf{a}_r(\theta_k) \otimes \mathbf{a}_t(\phi_k) \quad (10)$$

\otimes 表示 Khatri-Rao 积, \otimes 表示 Kronecker 积。由此可得接收阵元经过匹配滤波之后的接收数据

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (11)$$

其中, $\mathbf{s}(t)$ 是回波信号矢量

$$\mathbf{s}(t) = [\beta_1 e^{j2\pi f_{d1} t / f_s}, \beta_2 e^{j2\pi f_{d2} t / f_s}, \dots, \beta_k e^{j2\pi f_{dk} t / f_s}, \dots, \beta_K e^{j2\pi f_{dK} t / f_s}]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1} \quad (12)$$

其中, β_k 为第 k 个点目标的雷达截面系数(Radar cross section, RCS), f_{dk} 为第 k 个点目标的多普勒频率, f_s 为发射波形的脉冲重复频率, $\mathbf{n}(t)$ 是均值为 0、方差为 σ^2 的加性高斯白噪声矢量。

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_{(M+N-1)^2}(t)]^T \in \mathbb{C}^{(M+N-1)^2 \times 1} \quad (13)$$

计算空间协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx}

$$\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{(M+N-1)^2} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2]$ 是信源的协方差矩阵, σ_k^2 是第 k 个信源的功率, \mathbf{I} 是维度为 $(M + N - 1)^2 \times (M + N - 1)^2$ 的单位矩阵,实际工程应用中,空间协方差矩阵可用 L 个采样快拍进行估计,于是有

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \quad (15)$$

其中, $t=1, 2, \dots, L$ 。

2 双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合估计

2.1 基于二维 MUSIC 算法的双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合估计算法

对空间协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx} 进行特征值分解

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}_s \mathbf{U}_s \mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n \mathbf{U}_n \mathbf{E}_n^H \quad (16)$$

其中, \mathbf{E}_s 是 \mathbf{R}_{xx} 的 K 个主特征值所对应的特征向量, 即信号子空间, \mathbf{E}_n 是 $[(M+N-1)^2 - K]$ 个其他特征值所对应的特征向量, 即噪声子空间, \mathbf{U}_s 和 \mathbf{U}_n 分别是 K 个主特征值以及 $[(M+N-1)^2 - K]$ 个其他特征值所组成的对角矩阵。根据噪声子空间与 DOD、DOA 对应的导向矢量的正交性, 可构造二维空间谱的计算表达式

$$P_{\text{MUSIC}}(\phi, \theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\phi, \theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\phi, \theta)}, \quad (17)$$

$$\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

其中, $\mathbf{a}(\phi, \theta) = \mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{a}_t(\phi)$ 。 K 个谱峰所对应的位置即为估计出的 DOD、DOA。

2.2 双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合降维估计算法

上述的基于二维 MUSIC 算法的双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合估计算法涉及二维的穷尽搜索, 因而运算量极大, 在实际的测向系统中应用并不现实。针对该问题, 提出了该阵列结构下基于降维 MUSIC 算法的 DOD、DOA 联合估计算法。

首先定义 $V(\phi, \theta)$

$$V(\phi, \theta) = [\mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{a}_t(\phi)]^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H [\mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{a}_t(\phi)] \quad (18)$$

对式(18)重构变形, 表达为

$$V(\phi, \theta) = \mathbf{a}_t^H(\phi) [\mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{I}_{M+N-1}]^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H [\mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{I}_{M+N-1}] \mathbf{a}_t(\phi) = \mathbf{a}_t^H(\phi) \mathbf{Q}(\theta) \mathbf{a}_t(\phi) \quad (19)$$

其中, $\mathbf{Q}(\theta) = [\mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{I}_{M+N-1}]^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H [\mathbf{a}_r(\theta) \otimes \mathbf{I}_{M+N-1}]$ 。寻找表达式(18)的最优解集 (ϕ, θ) , 亦即 $V(\phi, \theta)$ 的极小值点, 是一个二次优化问题。

为求得 $V(\phi, \theta)$ 的极值点, 首先增加约束条件 $\mathbf{e}^T \mathbf{a}_t(\phi) = 1$, 其中 $\mathbf{e} = [1, 0, \dots, 0]$, 以排除 $\mathbf{a}_t(\phi)$ 为全 0 的无意义解。至此, 问题转化为约束条件下求解最优解的数学问题, 描述如下

$$\min \mathbf{a}_t^H(\phi) \mathbf{Q}(\theta) \mathbf{a}_t(\phi) \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{a}_t(\phi) = 1 \quad (20)$$

按照拉格朗日乘数法求解最优值的标准方法, 首先定义代价函数

$$L(\phi, \theta) = \mathbf{a}_t^H(\phi) \mathbf{Q}(\theta) \mathbf{a}_t(\phi) - \lambda (\mathbf{e}^T \mathbf{a}_t(\phi) - 1) \quad (21)$$

其中, λ 为常数, 对该式求关于 $\mathbf{a}_t(\phi)$ 的偏导, 并使其为 0

$$\frac{\partial L(\phi, \theta)}{\partial \mathbf{a}_t(\phi)} = 2\mathbf{Q}(\theta) \mathbf{a}_t(\phi) + \lambda \mathbf{e} = 0 \quad (22)$$

可解得 $\mathbf{a}_t(\phi) = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}$, 又有约束 $\mathbf{e}^T \mathbf{a}_t(\phi) = 1$, 进而可得

$$\mathbf{a}_t(\phi) = \frac{\mathbf{Q}^{-1}(\theta) \mathbf{e}}{\mathbf{e}^H \mathbf{Q}^{-1}(\theta) \mathbf{e}} \quad (23)$$

将式(23)代入 $\min \mathbf{a}_t^H(\phi) \mathbf{Q}(\theta) \mathbf{a}_t(\phi)$, 可得

$$\theta = \arg \min \frac{1}{\mathbf{e}^H \mathbf{Q}^{-1}(\theta) \mathbf{e}} = \arg \max \mathbf{e}^H \mathbf{Q}^{-1}(\theta) \mathbf{e} \quad (24)$$

在 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 上对式(24)进行搜索, K 个峰值所在位置即为 DOA 估计 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K)$ 。

随后将 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K)$ 代入式(23), 可得发射阵列下离开角所对应的导向矢量 $(\hat{\mathbf{a}}_t(\phi_1), \hat{\mathbf{a}}_t(\phi_2), \dots, \hat{\mathbf{a}}_t(\phi_K))$ 。第 k 个真实 DOD, 即 ϕ_k , 所对应的发射阵列导向矢量为

$$\mathbf{a}_t(\phi_k) = [\mathbf{a}_{t1}^T(\phi_k), \mathbf{a}_{t2}^T(\phi_k)]^T = [1, \mathbf{e}^{jN\pi\sin(\phi_k)}, \dots, \mathbf{e}^{j(M-1)N\pi\sin(\phi_k)}, \mathbf{e}^{-j(N-1)M\pi\sin(\phi_k)}, \mathbf{e}^{-j(N-2)M\pi\sin(\phi_k)}, \dots, \mathbf{e}^{-jN\pi\sin(\phi_k)}]^T \quad (25)$$

定义

$$\mathbf{g}_k = -\text{angle}(\mathbf{a}_t(\phi_k)) = [0, -N\pi\sin(\phi_k), \dots, -(M-1)N\pi\sin(\phi_k), (N-1)M\pi\sin(\phi_k), (N-2)M\pi\sin(\phi_k), \dots, N\pi\sin(\phi_k)] \quad (26)$$

其中, $\text{angle}(\cdot)$ 为取相位角操作。进而使用最小二乘策略求解 ϕ_k , 最小二乘拟合公式如下

$$\min_c \|\mathbf{P}\mathbf{c}_k - \hat{\mathbf{g}}_k\|_F^2 \quad (27)$$

其中, $\mathbf{c}_k = [c_{k0}, c_{k1}]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 是未知参数, c_{k1} 即为 $\pi\sin\phi_k$, c_{k0} 为其他参数, 可忽略。 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(M+N-1) \times 2}$, 具体为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -N(M-1) & -N(M-2) & \dots & -N & 0 & M & 2N & \dots & (N-1)M \end{bmatrix}^T$$

由式(27)可解得

$$\mathbf{c}_k = [\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{g}}_k \quad (28)$$

则估计的发射角度 $\hat{\phi}_k$ 可由下式得到

$$\hat{\phi}_k = \arcsin(\hat{c}_{k1}/\pi) \quad (29)$$

算法的步骤描述如下:

1. 按照式(15)对接收信号求解空间协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx} , 并对该矩阵进行特征值分解, 得到噪声子空间 \mathbf{E}_n 。
2. 按式(24)进行峰值搜索, K 个极大值所对应的位置即为估计的 DOA。
3. 将步骤 2 中得到的 DOA 估计代入式(23), 得到发射阵列下 DOD 所对应的导向矢量。
4. 分别由式(26)、式(28)得到 $\mathbf{g}_k, \mathbf{c}_k$, 最后按照式(29)得到 $\hat{\phi}_k$ 。

2.3 无相位模糊的证明

展开互质阵列 MIMO 雷达的发射阵列以及接收阵列的阵元间距是半波长的倍数, 但是由于收发阵列的各自子阵的数目互质, 可避免阵元间距大于半波长而可能导致的相位模糊问题。

现针对该阵列结构下算法不存在相位模糊问题进行证明。设 (ϕ_k^e, θ_k^e) 是估计的第 k 个信源的离开角度和波达角度。假定存在另外一个模糊角度对 (ϕ_k^a, θ_k^a) , 满足 $\phi_k^a \neq \phi_k^e, \theta_k^a \neq \theta_k^e$, 使得产生相位模糊。此时 (ϕ_k^a, θ_k^a) 与 (ϕ_k^e, θ_k^e) 满足以下关系

$$\mathbf{a}(\phi_k^a, \theta_k^a) = \mathbf{a}(\phi_k^e, \theta_k^e) \quad (30)$$

由式(3)、式(4)、式(10)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{r1}^T(\phi_k^a) &= \mathbf{a}_{r1}^T(\phi_k^e) \\ \mathbf{a}_{r2}^T(\phi_k^a) &= \mathbf{a}_{r2}^T(\phi_k^e) \\ \mathbf{a}_{r1}^T(\theta_k^a) &= \mathbf{a}_{r1}^T(\theta_k^e) \\ \mathbf{a}_{r2}^T(\theta_k^a) &= \mathbf{a}_{r2}^T(\theta_k^e) \end{aligned} \quad (31)$$

由式(5)、式(6)进一步得到

$$\begin{aligned} N\pi \sin \theta_k^a &= N\pi \sin \theta_k^e + 2k_1\pi, k_1 \in (-N, N) \\ M\pi \sin \theta_k^a &= M\pi \sin \theta_k^e + 2k_2\pi, k_2 \in (-M, M) \end{aligned} \quad (32)$$

由式(32), 有

$$\frac{M}{N} = \frac{k_1}{k_2} \quad (33)$$

由于 M, N 互质, 根据文献[10]定理 1 可知, 不存在这样的 θ_k^a , 使得式(33)成立。同样的, 可证明不存在 ϕ_k^a , 进而无模糊问题得证。

2.4 复杂度分析

本文提出的算法的复杂度主要与收发阵列的数目、信源数目 K 、快拍数 L 以及搜索次数 n 强相关。本部分主要对比该阵列结构下二维 MUSIC 算法、combined-ESPRIT^[15] 算法、本文的降维算法的复杂度。首先, 按照式(15)计算空间协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_{xx} \in \mathbb{C}^{(M+N-1)^2} \times (M+N-1)^2$, 设 $a = M+N-1$, 则复杂度为 La^4 。对 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 进行特征值分解的复杂度为 $O(a^6)$ 。本文算法在进行 DOA 估计时使用谱峰搜索的方式, 谱峰搜索部分复杂度为 $n[(a^3 + a^2)(a^2 - K) + a^2]$ 。此外, 在求解 DOD 的过程中只涉及轻量

级的计算, 因而将该部分复杂度忽略。因此本文算法总的复杂度近似为 $O\{La^4 + a^6 + n[(a^3 + a^2)(a^2 - K) + a^2]\}$ 。同样, 可分析得到二维 MUSIC 算法以及 combined-ESPRIT 算法的复杂度并将其列于表 1。此外, 为了更直观地表示各算法复杂度的差异, 表 1 还给出了在搜索步进为 $0.01^\circ, M=4, N=3$, 快拍数 L 为 1 000, 信源数 K 为 5 时, 各算法乘法次数的对比。由此可知, 本文算法由于避免了二维的穷尽搜索, 复杂度远远低于二维 MUSIC 算法。在上述仿真条件下, 具体的乘法次数仅有二维 MUSIC 算法的千分之一量级。但是本文算法仍需一维的穷尽搜索, 因而其复杂度相较无需穷尽搜索、以求解闭式解为特征的 combined-ESPRIT 算法依旧是巨大的, combined-ESPRIT 算法的乘法次数仅有本文算法的百分之一。但是需指出本文算法与 combined-ESPRIT 算法的复杂度上的显著差异应当归因于谱峰搜索算法, 与直接求解闭式解算法存在基本原理上的差别。

表 1 各算法复杂度以及某条件下的乘法次数对比

算法	复杂度	乘法次数
二维 MUSIC	$O\{La^4 + a^6 + n^2[a^2(a^2 - K) + a^2 - K]\}$	3.7167×10^{11}
本文算法	$O\{La^4 + a^6 + n[(a^3 + a^2)(a^2 - K) + a^2]\}$	1.426145×10^8
文献[15]算法	$O\{La^4 + a^6 + 6K^2a(M-1) + 6K^2a(N-1) + 12K^2\}$	1.3744×10^6

3 仿真结果分析

针对所提算法在 MATLAB R2016a 软件上进行了数值仿真, 以验证其性能。默认仿真条件为搜索步进为 0.01° , 展开互质阵列以及传统互质阵列的子阵 1、2 的阵元数目均分别设为 $M=4, N=3$, 信源数目设为 6, 且 6 个信源的 DOD、DOA 角度对分别为 $[(-62^\circ, -50^\circ), (-55^\circ, -35^\circ), (-47^\circ, -20^\circ), (50^\circ, 48^\circ), (65^\circ, 60^\circ)]$ 。

3.1 DOD、DOA 联合估计二维图谱

信噪比 SNR 设置为 -15 dB, 快拍数 L 为 500, 其他仿真条件均为默认。分别得到展开互质阵列 MIMO 雷达、传统互质阵列 MIMO 雷达以及均匀阵列 MIMO 雷达下的 DOD、DOA 联合降维估计算法的二维图谱, 如图 2 所示。该仿真条件下, 展开互质阵列 MIMO 雷达下算法可准确识别 DOD 和 DOA, 同时均匀阵列 MIMO 雷达下的估计已经基本无法得到正确估计, 而传统互质阵列 MIMO 雷达下的估计亦能够识别 DOD、DOA, 但精确度不及展开互质阵列 MIMO 雷达下的算法。

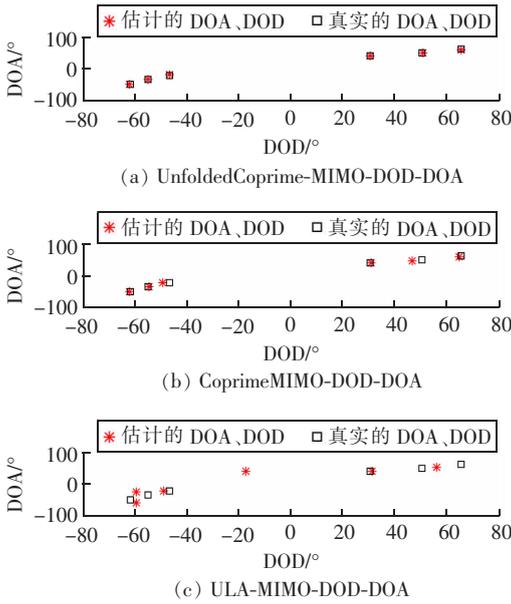


图 2 信噪比 SNR = -15 dB,快拍数 L = 500 时各阵列下的 DOA、DOD 联合估计图示

进行多信源数的空间谱图的仿真,其他条件不变,子阵 1、2 的阵元数目分别设为 $M = 7, N = 5$,信噪比设为 0 dB,信源数设置为 57, DOD 以及 DOA 均设在 $[-70^\circ, 70^\circ]$ 上以 2.5° 等间隔分布。得到空间二维图谱如图 3 所示,可见算法几乎能够准确识别每个信源的 DOD、DOA。

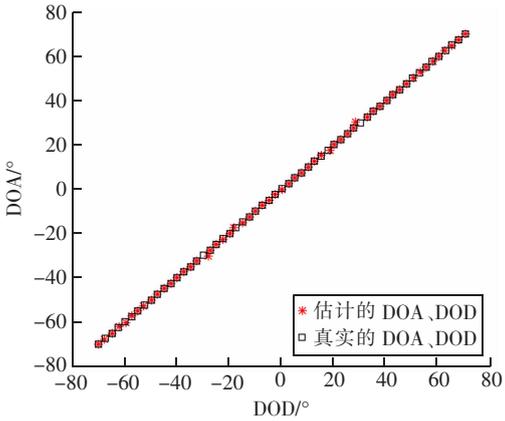


图 3 SNR = 0 dB,快拍数 L = 500 时多信源空间谱图

3.2 均方根误差仿真

本部分对比双基地传统互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合降维估计算法,双基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOD、DOA 联合降维估计算法以及文献 [15] combined-ESPRIT 算法的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)。均方根误差的计算公式如下

$$RMSE = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{\frac{1}{G} \sum_{i=1}^G ((\phi_k - \hat{\phi}_{k,i})^2 + (\theta_k - \hat{\theta}_{k,i})^2)} \quad (34)$$

其中, G 是蒙特卡洛实验次数, $\hat{\phi}_{k,i}$ 是第 i 次对 ϕ_k 的估计值, $\hat{\theta}_{k,i}$ 是第 i 次对 θ_k 的估计值。

3.2.1 均方根误差随 SNR 的变化关系仿真

快拍数设为 1 000,其他仿真条件均为默认。每个信噪比下进行 100 次蒙特卡洛实验,得到 RMSE 关于 SNR 的变化关系如图 4 所示。可见本文算法在信噪比较低时显著优于其他的两种算法,在 SNR 低至 -14 dB 时 RMSE 可达到小于 0.2° ,而 combined-ESPRIT 算法的 RMSE 几乎达到了 0.9° 。在信噪比较高时,本文算法仍具备明显优势。所以在 RMSE 关于信噪比变化中本文算法全面优于其他两种算法。

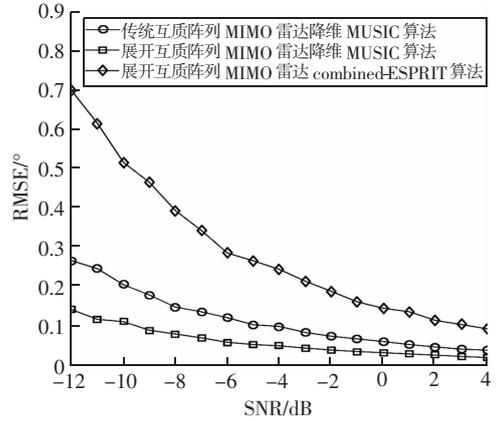


图 4 几种估计方法的 RMSE 随 SNR 变化情况

3.2.2 均方根误差随快拍数的变化关系

设置信噪比 SNR 为 0 dB,其他条件为默认。同样地,在每个快拍数下进行 100 次蒙特卡洛实验,得到 RMSE 随快拍数的变化关系,如图 5 所示。可见本文算法 RMSE 在快拍数由 100 升至 1000 的过程中均明显优于其他两种算法。同样可见本文算法的 RMSE 在快拍数大于 300 以后对快拍数的进一步提高已不再敏感。

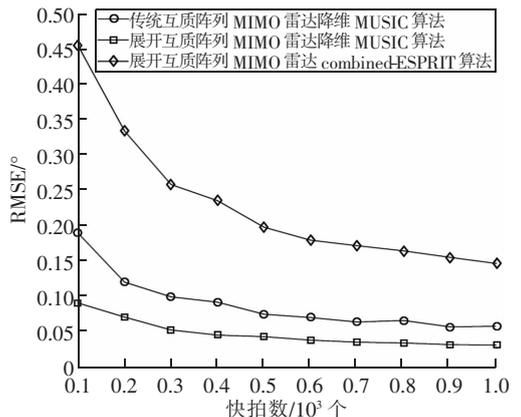


图 5 几种估计方法 RMSE 随快拍数变化情况

3 结束语

本文针对双基地展开互质阵列 MIMO 雷达下的 DOD、DOA 联合估计进行了深入的研究。首先,该阵列结构将展开互质阵列作为 MIMO 雷达的收发阵列,获得了大幅扩展的阵列孔径,其次 MIMO 雷达能够获得远超实际阵元数目的虚拟阵列,这在提高算法估计精度的同时亦使得自由度大幅提高,达到 $(M+N-1)^2$ 。基于该阵列,提出了基于降维 MUSIC 算法的 DOD、DOA 估计方法。该算法下 DOD、DOA 自动配对,且子阵间距大于半波长可能导致的相位模糊问题可由子阵数目互质得以消除。该算法获得了显著提升的分辨率、自由度以及低信噪比下更为优异的估计性能。仿真结果表明算法在信噪比低至 -15 dB 时,对 6 个信源的估计仍有着优异的估计性能,在识别信源数目高达 57 个的场景下亦优势明显。在均方根误差关于信噪比以及均方根误差关于快拍数的性能比较上,算法亦显著优于传统互质阵列 MIMO 雷达下的降维 DOD、DOA 估计算法以及展开互质阵列 MIMO 雷达下的 combined-ESPRIT 算法。基于上述仿真实验可得出结论,算法的估计性能全面优于传统互质阵列 MIMO 雷达下的估计算法以及文献[15]中的 combined-ESPRIT 算法。但是,值得说明的是本文算法优于 combined-ESPRIT 算法是在复杂度呈指数级提升的前提下获得的。

参考文献:

[1] BLISS D W, FORSYTHE K W. Multiple input multiple output (MIMO) radar and imaging: degrees of freedom and resolution[C]//37th Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, Pacific Grove. 2003:54-59.

[2] CHEN D F, CHEN B X, et al. Angle estimation using ESPRIT in MIMO radar[J]. Electronics Letters, 2008, 44(12):770-771.

[3] ZHANG X F, XU L Y, et al. Direction of departure (DOD) and direction of arrival (DOA) estimation in MIMO radar with reduced-dimension MUSIC[J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(12):1161-1163.

[4] ZHENG Z, ZHANG Y. Fast method for multi-target localization in bistatic MIMO radar[J]. Electronics Letters, 2011, 47(2):138-139.

[5] SHI J, HU G, ZONG B, et al. DOA estimation using multipath echo power for MIMO radar in low-grazing angle[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(15):6087-6094.

[6] ZHANG W, LIU W, WANG J, et al. Joint transmission and reception diversity smoothing for direction finding of coher-

ent targets in MIMO radar[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2014, 8(1):115-124.

[7] KHODJAEVJ, LEEJ H, CHONGJ W, et al. Joint estimation of direction of departure and direction of arrival for multiple-input multiple-output radar based on improved joint ESPRIT method[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2015, 9(3):308-317.

[8] 张小飞, 林新平, 郑旺, 等. 互质阵中空间谱估计研究进展[J]. 南京航空航天大学学报, 2017, 49(5):635-644.
ZHANG X F, LIN X P, ZHENG W, et al. Research progress on spatial spectrum estimation in coprime array[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 49(5):635-644. (in Chinese)

[9] ZHOU C, SHI Z, GU Y, et al. DECOM: DOA estimation with combined music for coprime array[C]//International Conference on Wireless Communications & Signal Processing. 2013:1-5.

[10] HE L, LIN X P, et al. Noncircular signal DOA estimation with reduced dimension music for coprime linear array[C]//Annual International Conference on Network and Information Systems for Computers. 2018:117-121.

[11] WANG Z, ZHANG X, PAN G, et al. DOA estimation for coprime linear arrays: an ambiguity-free method involving full DOFs[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 22(3):562-565.

[12] ZHAI H, ZHANG X, ZHENG W, et al. DOA estimation of noncircular signals for unfolded coprime linear array: identifiability, DOF and algorithm[J]. IEEE Access, 2018(2):1.

[13] GONG P, ZHANG X, ZHENG W. Unfolded coprime L-shaped arrays for two-dimensional direction of arrival estimation[J]. International Journal of Electronics, 2018, 105(9):1501-1519.

[14] ZHENG L, WEI W, PAN G, et al. Unfolded coprime bistatic MIMO radar for joint DOD and DOA estimation: from viewpoint on aperture augment for sum coarray[J]. International Journal of Electronics, 2019, 106(12):1999-2018.

[15] LI J, ZHANG X, JIANG D. DOD and DOA estimation for bistatic coprime MIMO radar based on combined ESPRIT[C]//CIE International Conference on Radar (RADAR). 2016:1-4.

[16] 周围, 王强, 唐俊, 等. 单基地展开互质阵列 MIMO 雷达 DOA 估计[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2019, 39(6):1-8.
ZHOU W, WANG Q, TANG J, et al. DOA estimation for Monostatic MIMO Radar Based on Unfolded Coprime Array[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2019, 39(6):1-8. (in Chinese)